

DOI: 10.16285/j.rsm.2021.1754

可变形圆化多边形离散单元法

周洋诗琦, 赵兰浩, 邵琳玉, 毛 佳

(河海大学 水利水电学院, 江苏 南京 210098)

摘 要: 将基于圆化多边形离散单元法与有限元方法结合, 提出一种可变形圆化多边形离散单元法。此法对块体离散元进行圆化处理, 可较好地表征不规则块体外形, 又保留了颗粒离散元计算高效的优势。在求解接触力时, 消除了角点处法向奇异等问题, 同时增强计算的稳定性和简化接触判断。同时对切向接触力计算模型进行修正, 使得接触力计算效率得到提高。此法突破了圆化多边形刚体假设的限制, 可以精确计算任意形状不规则离散单元之间的相互作用, 对单元的运动和变形进行模拟。通过超静定梁冲击试验、不规则块体单轴压缩试验和料斗流动“卡阻”试验 3 个数值模拟算例, 论证此法可以有效地捕捉单元的碰撞、分离和变形等空间运动和自身特性以及其微观力学表征。

关 键 词: 圆化多边形离散单元法; 可变形单元; 接触力

中图分类号: O 242

文献标识码: A

文章编号: 1000-7598 (2022) 07-1961-09

A deformable spheropolygon-based discrete element method

ZHOU Yang-shi-qi, ZHAO Lan-hao, SHAO Lin-yu, MAO Jia

(College of Water Conservancy and Hydropower Engineering, Hohai University, Nanjing, Jiangsu 210098, China)

Abstract: A deformable spheropolygon-based discrete element method (DSEM) which combines the spheropolygon-based discrete element method (DEM) and the finite element method (FEM) is proposed. In this method, with the rounded discrete elements, the shape of the irregular blocks can be well characterized while the high efficiency advantage of particle discrete element method is also kept. The proposed method can not only eliminate the normal singularity at the corner but also improve the stability and simplify the contact judgment during contact force calculation. Meanwhile, the calculation model of the tangential contact force is also modified to improve the efficiency of contact force calculation. The DSEM breaks through the limitation of the rigid body hypothesis of the spheropolygon. Thus, the interaction between discrete elements with arbitrary shape can be accurately calculated, and the movement and deformation of the elements can also be simulated. Finally, three numerical examples including the dynamic response of statically indeterminate beam, the uniaxial compression test of irregular block, and hopper flow test is simulated using the DSEM to prove that the proposed method can effectively capture both the spatial motion as well as characteristics of elements (such as collision, separation and deformation) and their microscopic mechanical characterization.

Keywords: spheropolygon-based DEM; deformable particles; contact force

1 引 言

岩体中存在大量方向各异、尺寸各异的不连续面, 使得岩体表现出很强的不连续性和非线性。对这类非连续介质问题的描述多依赖于非连续数值方法, 如不连续变形分析 (discontinuous deformation analysis, 简称 DDA)、以及离散单元法 (discrete element

method, 简称 DEM)^[1]。其中离散单元法原理简单, 发展迅速, 被广泛应用于不同学科, 具有传统的基于连续性变形假设的数值方法不可比拟的优势^[2-3]。

根据单元几何特征离散元可以分为两类, 颗粒离散元和块体离散元。颗粒离散元的单元形状一般采用圆形或者椭圆形^[4], 其形状简单, 带来的优势是接触判断和接触力计算非常简单^[5], 但存在无法

收稿日期: 2021-10-18

修回日期: 2022-05-10

基金项目: 国家自然科学基金 (No. 52009034); 霍英东教育基金会第十五届高等院校青年教师基金 (No. 151073); 中央高校基本科研业务费专项基金 (No. B210201036)。

This work was supported by the National Natural Science Foundation of China (52009034), the 15th Fok Ying-Tong Education Foundation for Young Teachers in the Higher Education Institutions of China (151073) and the Fundamental Research Funds for the Central Universities (B210201036).

第一作者简介: 周洋诗琦, 女, 1998 年生, 硕士研究生, 主要从事离散元方面的研究工作。E-mail: zysq@hhu.edu.cn

通讯作者: 赵兰浩, 男, 1980 年生, 博士, 教授, 主要从事流固耦合和水工结构抗震方面的研究工作。E-mail: zhaolanhao@hhu.edu.cn

反映真实形态的问题, 后有学者采用非圆形颗粒, 如高次曲面^[6]、组合球颗粒^[7]进行模拟, 但高次曲面模型只适用于特定的颗粒形态, 组合球颗粒也不足以描述结构真实形状, 且颗粒数量庞大^[8-9]。

多边形块体离散单元可以更真实地描述块体形状, 其具有锋利的边缘和平坦表面, 规避了椭圆、超二次曲面对称性的局限^[8]。但是块体离散单元接触判断难度大, 块体单元间存在不同的接触形式需要单独判断确定, 如点-点接触、点-边接触和边-边接触等, 缺乏一个简单统一的接触检测模型。此外, 当两个多边形单元发生点-点接触时, 现有的接触模型的鲁棒性欠佳^[10-11]。

Munjiza 等^[12]提出的有限-离散单元耦合分析方法 (combined finite-discrete element method, 简称 FDEM), 建立了全新的接触计算模型, 避免了原本离散单元法中繁琐的接触形式讨论。但有限-离散单元耦合法对单元类型有严格的限制, 复杂模型只能离散为三角形单元, 在进行几何形状复杂的块体离散时, 会导致单元数量巨增, 计算效率低下^[13]。此外, 由于线性三角形有限元公式欠缺, 离散的单元应力和应变被假定为恒定, 虽然三角形单元的高阶插值函数已与其他方法结合来克服这一缺陷, 但受限于高成本的计算资源, 实现并不理想^[14]。

圆化多边形离散单元法^[15-17]兼容了块体元和颗粒元的优点, 其基本思想是将块体尖锐的角点进行圆化处理, 这样既可以较好地表征不规则块体外形, 又保留了颗粒离散元计算高效的优势, 在求解接触力时, 接触方式的改变不会引起接触力的突变, 消除了角点处法向奇异等问题^[14], 同时还可增强计算的稳定性和简化接触判断^[18]。然而, 这种方法仍然存在一些缺陷, 圆化多边形离散单元法中的切向力计算成本高昂, 接触力的计算是在接触对之间进行的, 一个单元可能存在多个接触对, 这就需要很大的计算机内存来存储所有单元边界的接触历史和接触力矢量, 以及每一时刻块体的位移增量^[14,19]。除此之外, 现有的圆化多边形离散单元研究中都采用刚体假设, 这样无法捕获单个离散单元的变形行为^[20-21]。

针对上述问题, 本文提出了一种可变形圆化多边形离散单元法 (A deformable spheropolygon-based discrete element method, 简称 DSEM)。与基于圆化多边形离散单元法相比, 本方法突破圆化多边形单元刚体限制, 可对任意形状单元运动变形进行精细刻画。在存储单元间接触力时, 不从几何元素出发, 而是从整体考虑, 仅记录单元与单元间的接触历史,

从而节约大量内存。通过超静定梁冲击试验、不规则块体单轴压缩试验和料斗流动“卡阻”试验三个数值模拟算例论证本文提出方法的可行性和准确性。

2 可变形圆化多边形离散单元法

2.1 圆化多边形离散单元概述

圆化多边形的雏形是在 2004 年由 Hopkins^[22]提出的, 他参考了数学形态学领域膨胀操作, 从球体集合中构造复杂形状的单元, 以椭圆单元为例, 提出了凸多边形接触检测算法。Pournin 等^[15-17]在 2005 年比较完整地提出了非圆形颗粒离散单元法, 采用闵可夫斯基和理论进行圆角化。Alonso-Marroquin^[14, 21]在 2008 年正式提出圆化多边形离散单元法, 用于模拟二维的复杂形状刚体相互作用。Galindotorres 等^[19]在 2010 年系统地提出了基于圆化多边形离散单元法的框架, 并通过真三轴模拟试验验证了颗粒形状对无黏性土的强度和剪胀特性的影响。

圆化多边形方法就是对多边形进行圆化处理, 圆化操作有数学图形学的膨胀操作和闵可夫斯基和两种理论基础。只有 Hopkins 采用数学图形学的膨胀操作, 其余大部分都采用闵可夫斯基和作为理论依据。

圆化多边形是将圆盘 S 围绕多边形的外轮廓移动, 构成最大的几何形状 SP , 为保证圆化后的多边形 SP 与原始多边形等大, 故先将原始多边形进行收缩得到圆化多边形骨架 H , 再经圆盘 S 膨胀。其中收缩和膨胀采用相同的半径 R 进行计算。具体过程如图 1 所示。

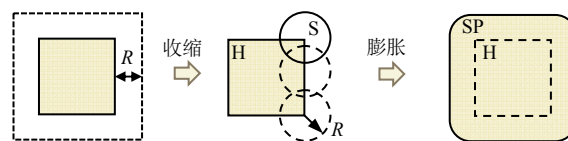


图 1 圆化多边形的生成

Fig.1 The generation of a spheropolygon

2.2 可变形圆化多边形离散元

离散单元遵循刚体假设, 为了使刚性单元发生变形, 将离散元内部划分有限元网格, 如图 2(a)所示。以最外层有限单元为最小接触单元, 进行接触检测和接触力计算, 如图 2(b)所示。圆化多边形用于计算接触力, 包括法向接触力和切向接触力。

2.3 法向接触力计算

圆化多边形 SP_1 和 SP_2 相互接触, 如图 3 所示。 SP_1 和 SP_2 的法向接触力为骨架几何元素之间的作

用力之和，包括顶点与顶点、顶点与边的所有元素集合，由于接触判断考虑的是元素之间最短距离，二维情况下边-边接触可以简化为点-点接触或点-边接触，于是法向接触力可表示为

$$\mathbf{P}_n = \sum_{\substack{i=1, NV_1 \\ j=1, NV_2}} \mathbf{P}_n(V_1^i, V_2^j) + \sum_{\substack{i=1, NV_1 \\ j=1, NE_2}} \mathbf{P}_n(V_1^i, E_2^j) + \sum_{\substack{i=1, NE_1 \\ j=1, NV_2}} \mathbf{P}_n(E_1^i, V_2^j) \quad (1)$$

式中：\$V_1\$、\$V_2\$ 和 \$E_1\$、\$E_2\$ 分别为骨架 \$H_1\$、\$H_2\$ 的顶点和边；\$NV_1\$、\$NV_2\$ 和 \$NE_1\$、\$NE_2\$ 分别为骨架 \$H_1\$、\$H_2\$ 的顶点和边的个数；\$\sum_{\substack{i=1, NV_1 \\ j=1, NV_2}} \mathbf{P}_n(V_1^i, V_2^j)\$ 表示点-点接触

的法向接触力求和；\$\sum_{\substack{i=1, NV_1 \\ j=1, NE_2}} \mathbf{P}_n(V_1^i, E_2^j)\$ 和

\$\sum_{\substack{i=1, NE_1 \\ j=1, NV_2}} \mathbf{P}_n(E_1^i, V_2^j)\$ 表示点-边接触作用力之和。

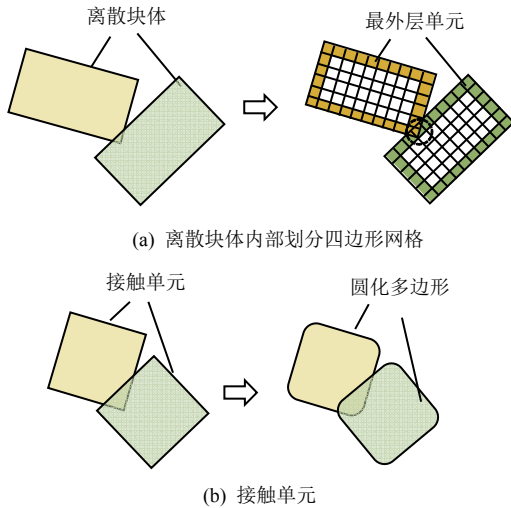


图 2 离散块体有限元网格划分

Fig.2 Finite element meshing indiscrete blocks

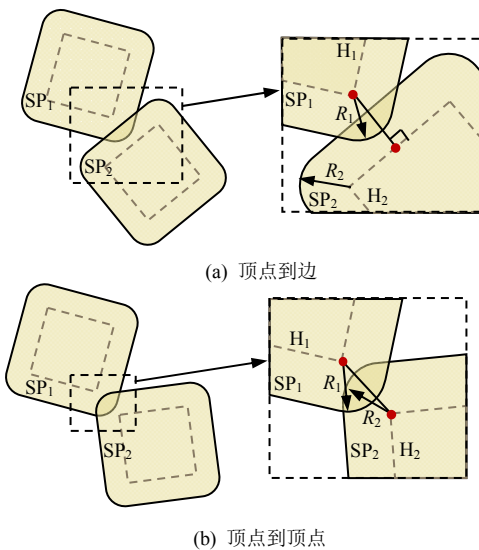


图 3 \$SP_1\$ 和 \$SP_2\$ 之间各几何元素的最短距离

Fig.3 The minimum distance between \$SP_1\$ and \$SP_2\$

法向接触力作用于 \$SP_1\$ 的力矩 \$\mathbf{M}_n\$ 为

$$\mathbf{M}_n = \mathbf{r}_n \times \mathbf{P}_n \quad (2)$$

式中：\$\mathbf{r}_n\$ 为合力 \$\mathbf{P}_n\$ 的载荷位置到 \$SP_1\$ 质心的矢量。

$$\mathbf{r}_n = \frac{\sum_{i=1}^m |\mathbf{P}_n^i| \mathbf{r}_n^i}{\sum_{i=1}^m |\mathbf{P}_n^i|} \quad (3)$$

式中：\$m\$ 为 \$SP_1\$ 的接触对数；\$\mathbf{P}_n^i\$ 为从一个接触对获得的法向接触力；\$\mathbf{r}_n^i\$ 为从 \$\mathbf{P}_n^i\$ 的载荷位置到的 \$SP_1\$ 质心的矢量。

2.4 切向接触力计算

在非连续介质滑动问题中，单元与单元之间接触碰撞，如图 4 所示，单元所受的切向接触力方向和大小会随时间不断改变，现有的切向位移增量求解格式，规避了切向接触力方向不好确定的问题，但其需要记录所有接触对几何元素的接触历史、接触力分量以及每个时刻的增量位移，当单元数量很大时会使得计算效率严重下降^[21]。

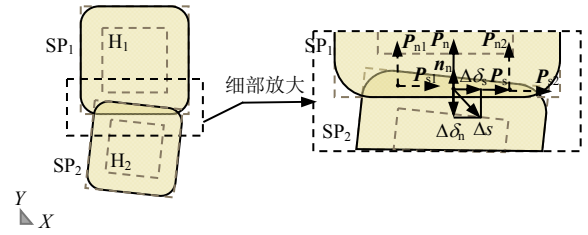


图 4 切向接触力的计算模型

Fig.4 Calculation model of the tangential contact force

为了克服上述问题，\$SP_1\$ 的切向力 \$\mathbf{P}_s\$ 由 \$SP_1\$ 与 \$SP_2\$ 每一时刻切向位移增量值 \$\Delta \delta_s\$ 确定，如图 4 所示。由切向力方向垂直于法向接触合力矢量 \$\mathbf{P}_n\$ 从而确定切向力方向，并且引入旋转矩阵实时更新修正切向接触力方向，载荷位置与总法向接触力矢量 \$\mathbf{P}_n\$ 相同。接触对的切向力 \$\mathbf{P}_s\$ 和切向位移增量 \$\Delta \delta_s\$ 存储在计算机存储器中。原本所需的计算机内存被大量释放，计算变得更加高效。

第 \$t + \Delta t\$ 时刻切向力增量 \$\Delta \mathbf{P}_s^{t+\Delta t}\$ 可以表示为

$$\Delta \mathbf{P}_s^{t+\Delta t} = K_s \cdot \Delta \delta_s^{t+\Delta t} \quad (4)$$

式中：\$K_s\$ 为切向接触刚度；\$t + \Delta t\$ 时刻切向增量位移 \$\Delta \delta_s^{t+\Delta t}\$ 计算如下：

$$\Delta \delta_s^{t+\Delta t} = \Delta \mathbf{s}^{t+\Delta t} - (\Delta \mathbf{s}^{t+\Delta t} \cdot \mathbf{n}_n) \cdot \mathbf{n}_n \quad (5)$$

式中：\$\Delta \mathbf{s}^{t+\Delta t}\$ 为 \$SP_1\$ 到 \$SP_2\$ 之间的位移增量；\$\mathbf{n}_n\$ 为单元法向接触合力的方向矢量。由于法向力方向矢量每一步都更新，故切向力矢量 \$\mathbf{P}_s^{t+\Delta t}\$ 的方向在每个时间步也需要用旋转矩阵 \$\mathbf{r}\$ 调整：

$$\mathbf{P}_s^{t+\Delta t} = \mathbf{r} \times \mathbf{P}_s^t + \Delta \mathbf{P}_s^{t+\Delta t} \quad (6)$$

式中: $\mathbf{r}$ 为 t 时刻到 $t + \Delta t$ 时刻之间的旋转矩阵, 由上一时刻和当前时刻物体所受到的法向接触合力方向矢量确定。

切向力 $\mathbf{P}_s^{t+\Delta t}$ 由摩尔-库仑屈服准则确定:

$$\mathbf{P}_s^{t+\Delta t} = \min(|\mathbf{P}_s^{t+\Delta t}|, \mu |\mathbf{P}_n^{t+\Delta t}|) \cdot \mathbf{n}_s \quad (7)$$

式中: μ 为摩擦系数; $\mathbf{n}_s$ 为时切向的单位矢量。

切向接触力所贡献的力矩为

$$\mathbf{M}_s = \mathbf{P}_s \times \mathbf{r}_s \quad (8)$$

式中: $\mathbf{r}_s$ 为 $\mathbf{P}_s$ 荷载力位置到单元质心的向量。

2.5 接触力与等效节点力的转换

离散单元法中的离散元只有一个基本节点 (单元的形心点), 这与有限单元法采用网格节点不同。需要将离散元求解得到的接触力根据静力等效原则转化为有限单元的等效结点荷载, 如图 5 所示。再通过求解动力控制方程, 得到位移、速度等响应量。等效节点力的求解采用直接平均法。

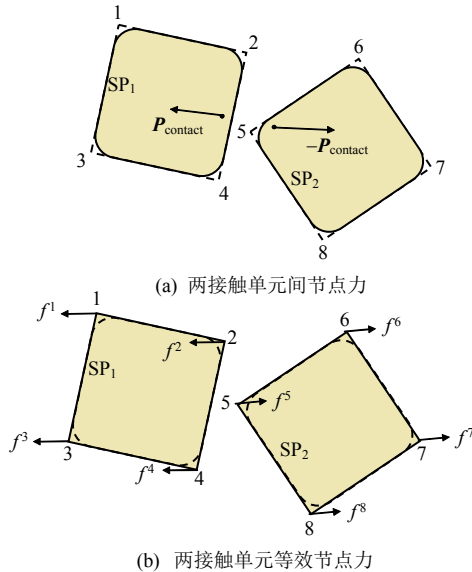


图 5 等效节点力求解

Fig.5 Solution of the equivalent nodal force

作用在接触单元上的合力 $\mathbf{P}_{\text{contact}}$ 和力矩 $\mathbf{M}_T$ 为

$$\mathbf{P}_{\text{contact}} = \mathbf{P}_n + \mathbf{P}_s \quad (9)$$

$$\mathbf{M}_T = \mathbf{M}_n + \mathbf{M}_s \quad (10)$$

将接触合力 $\mathbf{P}_{\text{contact}}$ 和合力力矩 $\mathbf{M}_T$ 平均分配给接触单元的节点。接触力的等效节点力为

$$\mathbf{f}_{\text{contact}}^i = \mathbf{f}_F^i + \mathbf{f}_T^i \quad (11)$$

式中: $\mathbf{f}_F^i$ 为接触力作用的节点力; $\mathbf{f}_T^i$ 为合力力矩提供的节点力。

$\mathbf{f}_F^i$ 可以表示为

$$\mathbf{f}_F^i = \frac{\mathbf{P}_{\text{contact}}}{n} \quad (12)$$

式中: n 为接触单元的节点数。

节点分配的节点力矢量 $\mathbf{f}_T^i$ 定义为

$$\mathbf{f}_T^i = f_T^i \mathbf{n}_{F_i} \quad (13)$$

$\mathbf{n}_{F_i}$ 是节点位移的方向, 满足

$$\mathbf{n}_{F_i} = \frac{\mathbf{M}_T \times \mathbf{r}_i}{|\mathbf{M}_T \times \mathbf{r}_i|} \quad (14)$$

式中: $\mathbf{r}_i$ 为形心到各节点的矢量。

节点力 $\mathbf{f}_T^i$ 计算表达式如下:

$$\mathbf{f}_T^i = \mathbf{r}_i \frac{|\mathbf{M}_T|^2}{\left(\sum_{i=1}^n \mathbf{r}_i |\mathbf{M}_T \times \mathbf{r}_i| \right)} \frac{\mathbf{M}_T \times \mathbf{r}_i}{|\mathbf{M}_T \times \mathbf{r}_i|} \quad (15)$$

2.6 动力控制方程显式求解

本计算方法充分考虑单元的变形特性, 涉及几何非线性, 包括大位移、大应变, 因此以有限单元为基本接触单元, 接触判断以及接触力的求解仅在最外层的有限单元之间进行。在实际应用中, 这些非线性问题可以用非线性有限元方法来解决。常用的非线性有限元求解格式有完全拉格朗日格式和更新拉格朗日格式。本文采用根据更新拉格朗日格式 (the updated Lagrangian formulation, 简称 UL) 求解计算^[23]。

τ_i 是参照现时构形定义的柯西应力, 第二类 Piola-Kirchhoff 应力是相对于初始构形定义的对称应力张量, 本文采用 UL 求解增量问题, 相对于初始时刻 t 构形的第二类 Piola-Kirchhoff 应力等于柯西应力, 即

$$\mathbf{S}_t = \tau_i \quad (16)$$

式中: $\mathbf{S}_t$ 为相对于时刻 t 的第二类 Piola-Kirchhoff 应力; τ_i 为参照现时构形定义的柯西应力。

$t + \Delta t$ 时刻的第二类 Piola-Kirchhoff 应力分解为时刻 t 的应力和增量应力之和:

$$\mathbf{S}_{t+\Delta t} = \mathbf{S}_t + \Delta \mathbf{S} = \tau_i + \Delta \mathbf{S} \quad (17)$$

式中: $\mathbf{S}_{t+\Delta t}$ 为 $t + \Delta t$ 时刻的第 2 类 Piola-Kirchhoff 应力; $\Delta \mathbf{S}$ 为增量应力。

在增量求解期间, 应变增量 $\Delta \mathbf{E}$ 等于 $t + \Delta t$ 时刻的 Green 应变 $\mathbf{E}_{t+\Delta t}$, 即

$$\Delta \mathbf{E} = \mathbf{E}_{t+\Delta t} \quad (18)$$

$$\delta \Delta \mathbf{E} = \mathbf{B} \delta \Delta \mathbf{a}_i \quad (19)$$

式中: δ 为变分算子; $\mathbf{B}$ 为 t 时刻构型对应的增量应变-位移转换矩阵; $\Delta \mathbf{a}_i$ 为 t 时刻到 $t + \Delta t$ 时刻单元的节点位移增量。

根据虚功原理:

$$\int \delta \Delta E^T (\boldsymbol{\tau}_t + \Delta \mathbf{S}) dV = \int \delta \Delta \mathbf{u}^T \bar{\mathbf{p}} dV + \int \delta \Delta \mathbf{u}^T \bar{\mathbf{q}} dA \quad (20)$$

式中: V 和 A 为时刻 t 物体构型占据的区域和规定外力的边界; $\bar{\mathbf{p}}$ 和 $\bar{\mathbf{q}}$ 分别为相对于时刻 t 构型定义的体力 and 面力的载荷矢量; $\Delta \mathbf{u}$ 为增量位移。

又由于 $\delta \Delta \mathbf{u} = \mathbf{N} \delta \Delta \mathbf{a}_i$, $\mathbf{N}$ 为插值函数 (形函数), 两边同时消去 $\delta \Delta \mathbf{a}_i$, 可以得到平衡方程:

$$\int \mathbf{B}_i^T (\boldsymbol{\tau}_t + \Delta \mathbf{S}) dV = \int \mathbf{N}^T \bar{\mathbf{p}} dV + \int \mathbf{N}^T \bar{\mathbf{q}} dA \quad (21)$$

内力的等效节点力矢量 $\mathbf{f}_{in}$ 表示为

$$\mathbf{f}_{in} = \int \mathbf{B}_i^T (\boldsymbol{\tau}_t + \Delta \mathbf{S}) d\Omega \quad (22)$$

运动方程的时间离散化公式为

$$m_i \mathbf{a}_i^{t+\Delta t} = \mathbf{f}_{ext}^{t+\Delta t} - \mathbf{f}_{in}^{t+\Delta t} - \mathbf{C}_i \mathbf{v}_i^{t+\Delta t} \quad (23)$$

式中: m_i 和 $\mathbf{C}_i$ 为结点 i 的质量和瑞利阻尼; $\mathbf{v}_i^{t+\Delta t}$ 和 $\mathbf{a}_i^{t+\Delta t}$ 为结点 i 在 $t + \Delta t$ 处的速度和加速度; $\mathbf{f}_{ext}^{t+\Delta t}$ 为结点 i 在 $t + \Delta t$ 时的外力向量, 包括总接触力接触 $\mathbf{f}_{contact}^{t+\Delta t}$ 和总外载荷 $\mathbf{f}_{load}^{t+\Delta t}$; $\mathbf{f}_{in}^{t+\Delta t}$ 为节点的内节点力向量。

求解运动方程采用显示求解格式, 用 Velocity Verlet 算法^[24]对运动方程进行积分。在预测阶段, 得到结点 i 在 $t + \Delta t/2$ 时刻的速度和 t 时刻的位移:

$$\left. \begin{aligned} {}^p \mathbf{v}_i^{t+\Delta t/2} &= \mathbf{v}_i^t + \frac{\Delta t}{2} \mathbf{a}_i^t \\ {}^p \mathbf{u}_i^{t+\Delta t} &= \mathbf{u}_i^t + \Delta t {}^p \mathbf{v}_i^{t+\Delta t/2} \end{aligned} \right\} \quad (24)$$

式中: $\mathbf{u}_i^t$ 、 $\mathbf{v}_i^t$ 和 $\mathbf{a}_i^t$ 为结点 i 在时刻 t 的位移、速度和加速度; ${}^p \mathbf{v}_i^{t+\Delta t/2}$ 为结点 i 在 $t + \Delta t/2$ 时的预测速度; ${}^p \mathbf{u}_i^{t+\Delta t}$ 为结点 i 在 $t + \Delta t$ 时的预测位移。

结点 i 在时间步长的运动可以用如下式子表示:

$$\left. \begin{aligned} \mathbf{u}_i^{t+\Delta t} &= {}^p \mathbf{u}_i^{t+\Delta t} \\ \mathbf{v}_i^{t+\Delta t} &= {}^p \mathbf{v}_i^{t+\Delta t/2} + \frac{\Delta t}{2} \mathbf{a}_i^{t+\Delta t} \end{aligned} \right\} \quad (25)$$

式中: $\mathbf{u}_i^{t+\Delta t}$ 、 $\mathbf{v}_i^{t+\Delta t}$ 和 $\mathbf{a}_i^{t+\Delta t}$ 为结点 i 在当前阶段时间步 $t + \Delta t$ 处的位移、速度和加速度。

3 数值计算

对于本文所提出的可变形圆化多边形离散单元法, 本节给出了几个算例验证所提方法的可行性和准确性。首先通过超静定梁的冲击试验结果对比验证计算方法的准确性; 然后通过不规则块体单元单轴压缩试验验证了本方法捕捉单元和单元在接触过程中内部应力的能力; 最后通过凹多边形卡阻试验, 表明本方法可以有效模拟可变形颗粒的运动行为。

3.1 超静定梁冲击试验

通过超静定梁受物块冲击试验证明本文提出的计算方法计算梁的应力和应变的准确性。梁尺寸为

10 m × 1 m (跨距 × 高度), 大小为 0.5 m × 0.5 m 的物块以初始速度 $v_y = -1.0$ m/s 垂直撞击梁。梁的左右两端固定约束。物块和梁的单元结构如图 6 所示。物块和梁都有相同的材料属性, 弹性模量、泊松比和质量密度分别为 $E = 20$ GPa、 $\nu = 0.2$ 和 $\rho = 2\,000$ kg/m³。法向刚度和切向刚度分别为 $K_n = 0.2$ GPa 和 $K_s = 0.2$ GPa。物块的单元数为 25, 梁的单元数为 1 000, 网格大小为 0.1 m × 0.1 m。

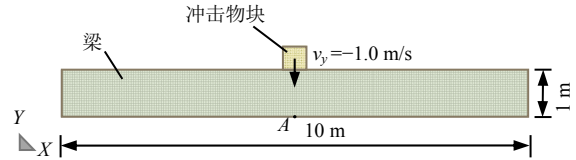


图 6 梁和冲击物块的网格划分
Fig.6 Meshing of the particle and the beam

采用 ABAQUS 和可变形圆化多边形离散单元法计算梁底中心点 A' 沿 y 轴位移历程和主应力如图 7、8 所示。图 9 对比了不同时刻两种方法计算梁应力分布图。从定性和定量的角度对比数值模拟结果, 结果表明本方法与 ABAQUS 模拟结果吻合良好, 进一步验证了本方法的准确性。

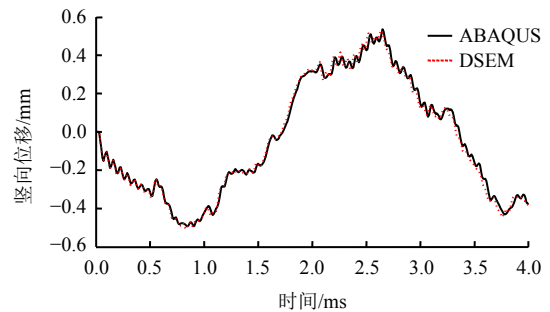


图 7 对比可变形圆化多边形离散单元法和 ABAQUS 计算 A' 点 y 向位移时间曲线

Fig.7 Comparison of y -displacement histories at the center point A' between the DSEM and ABAQUS

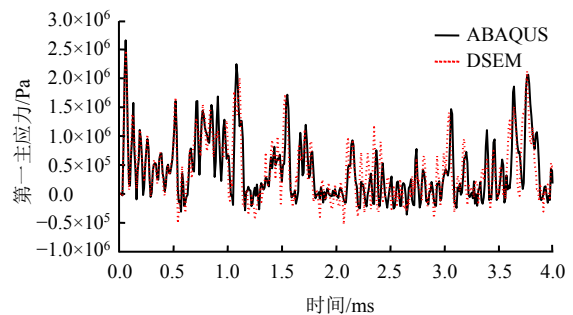


图 8 对比可变形圆化多边形离散单元法和 ABAQUS 计算 A' 点主应力

Fig.8 Comparison of major principle stresses at the center point A' between the DSEM and ABAQUS

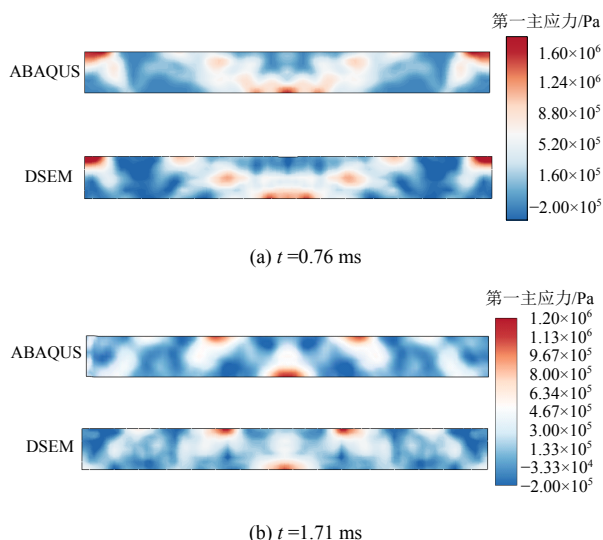


图9 梁的主应力对比图

Fig.9 Comparison of the major principle stresses distribution in the beam

3.2 不规则块体单轴压缩试验

本节模拟了不规则块体组成的混合体系在单轴压缩条件下的其内部应力变化。如图 10 所示, 顶部压板以恒定速度 $v_y = -1.0 \text{ m/s}$ 向下运动, 使得在准静态条件模拟中每个块体都处于平衡状态。这些块体具有相同的材料属性: 法向刚度 $K_n = 5 \text{ GPa}$, 切向刚度 $K_s = 5 \text{ GPa}$, 密度 $\rho = 2000 \text{ kg/m}^3$, 泊松比 $\nu = 0.25$, 弹性模量 $E = 2.0 \text{ GPa}$, 为直观捕捉物体

间相互作用, 忽略重力的影响。

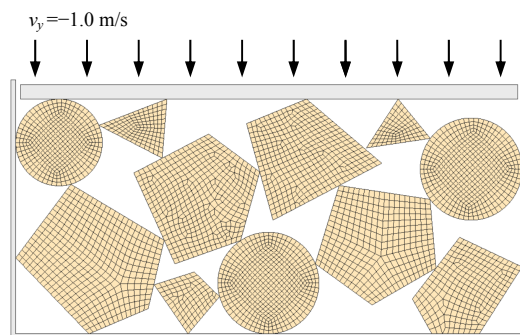


图10 不规则多边形块体分布图

Fig.10 Distribution of irregular polygonal blocks

由于接触情况复杂, 单元的应力分布也很复杂, 所以本节以定性的方式来展现本方法在复杂条件下接触捕捉的有效性, 如图 11 所示。最初, 应力集中只发生在模型的底部, 因为单元之间处于相对松散的状态, 只有模型底部的单元与板大面积接触。随着压板继续向下运动, 可以观察到更多的应力集中现象, 主要集中在板和单元之间, 单元和单元的接触点部位, 且更加显著, 直至达到最终的稳定状态, 从期间一系列过程可以看出整个系统的应力场呈现强不均匀性。进一步论证了本文提出的方法不仅可以捕获粒子间的接触行为, 而且可以计算粒子间的应力状态。

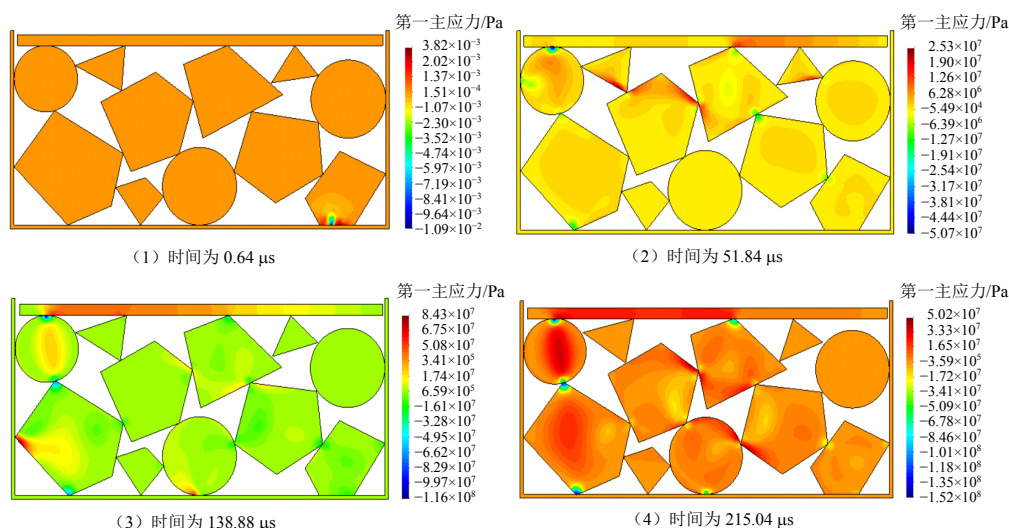


图11 块体接触内部主应力结果图

Fig.11 The major principle stresses inside the contacted particles

3.3 料斗流动卡阻试验

本节将验证一个颗粒流动的经典问题, 通过料斗的颗粒流出部分后, 将会发生阻塞现象, 堵塞是由于料斗开口处形成拱引起的^[25]。不同的学者从不

同的角度对此进行了研究, 例如 Kiwing^[26]研究了圆盘颗粒尺寸与漏斗开口大小对卡阻的影响, Alonso-Marroquin^[21]研究了不同颗粒形状对卡阻的影响, 并得出结论凹形颗粒比凸形颗粒更容易堵塞。

本节将采用可变形圆化多边形离散单元法模拟凹多边形单元在料斗中的动力学行为并且分析不同弹性模量对凹多边形颗粒卡阻的影响。3组弹性模量分别为2.0、0.2、0.02 GPa,泊松比为 $\nu=0.25$ 。凹多边形颗粒选用十字形,十字形颗粒在料斗中随机排列,料斗和十字形颗粒的几何形状及尺寸如图12所示。颗粒在重力作用下自由下落, $g=10\text{ m/s}^2$,颗粒与颗粒之间不设置摩擦。其中,颗粒密度为 $\rho=2\,500\text{ kg/m}^3$,法向刚度为 $K_n=5\text{ GPa}$,切向刚度为 $K_s=5\text{ GPa}$ 。料斗的弹性模量为 $E=20.0\text{ GPa}$,泊松比为 $\nu=0.25$ 。

不同弹性模量凹多边形各时间步(step)的应力结果如图13所示。当 $E=2.0\text{ GPa}$ 时,如图13(a)所示,十字形颗粒发生卡阻现象,在开口附近形成明显对称的拱形结构,但由于弹性模量较大,颗粒之间没有明显变形。同样,当弹性模量 $E=0.2\text{ GPa}$ 时,十字形颗粒也会相互卡住和挤压,如图13(b)所示,且粒子内部的应力增加。然而,在 $E=0.02\text{ GPa}$

的情况下,如图13(c)所示,颗粒完全流出料斗,未出现卡阻现象,颗粒之间挤压作用明显且产生了较大变形,使得承载的拱结构稳定性丧失,其细部状态如图14所示,相较于其他两组颗粒的内部应力最小。因此,可以看出颗粒的变形特性会对颗粒宏观动力行为产生显著影响,同时也验证了本文所提出的方法可以有效模拟可变形颗粒的运动行为。

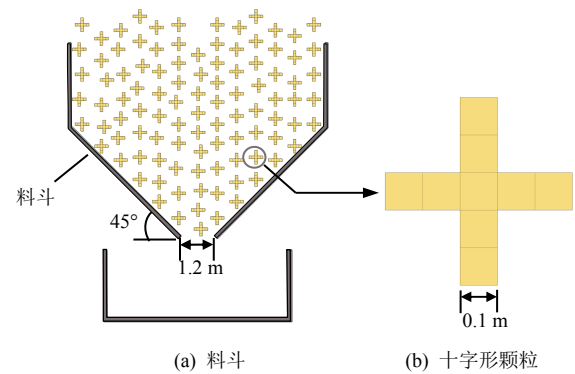


图12 模型的几何特性

Fig.12 The geometry properties of the model

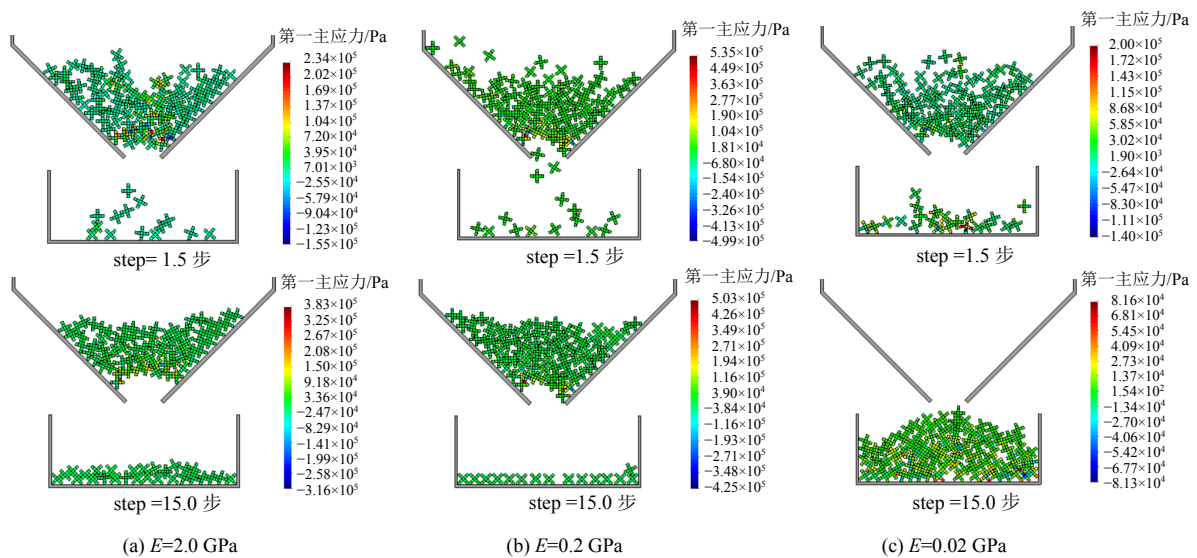
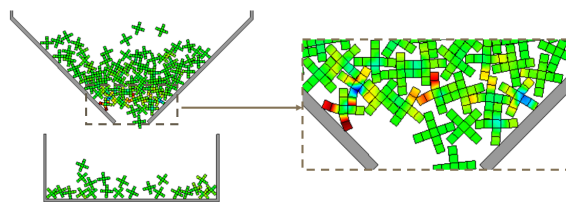


图13 不同弹性模量模拟结果图

Fig.13 Simulation results with different elastic moduli

图14 $E=0.02\text{ GPa}$ 时颗粒变形细部图Fig.14 Deformation of particle with $E=0.02\text{ GPa}$

4 结 论

(1) 本文提出了一种基于可变形圆化多边形的

离散单元法,将形状复杂的单元体进行圆化处理,突破圆化多边形单元的刚体假设,从而更好研究形状不规则单元的空间运动和自身变形特性以及其细观力学表征。

(2) 提出了改进的切向接触力计算模型,以位移增量法为基础、单元切向位移增量为未知量,计算每一时间步的切向接触力大小,以单元法向接触合力方向矢量确定接触力方向,引入旋转变换算法修正每一时间步的方向矢量。

(3) 最后通过几个典型算例论证了本方法的准

确性和有效性。

参 考 文 献

- [1] 马钺, 方祖烈, 马强. 岩石力学离散介质数值方法及应用程序研究综述[J]. 东北煤炭技术, 1999, (3): 17-22.
MA Yue, FANG Zu-lie, MA Qiang. A review on numerical methods and applications of discrete media in rock mechanics[J]. **Northeast Coal Technology**, 1999, (3): 17-22.
- [2] 王卫华, 李夕兵. 离散元法及其在岩土工程中的应用综述[J]. 岩土工程技术, 2005, (4): 177-181.
WANG Wei-hua, LI Xi-bing. A review of distinct element method researching progress and application[J]. **Geotechnical Engineering Technology**, 2005, (4): 177-181.
- [3] 周先齐, 徐卫亚, 钮新强, 等. 离散单元法研究进展及应用综述[J]. 岩土力学, 2007, 28(增刊 1): 408-416.
ZHOU Xian-qi, XU Wei-ya, NIU Xin-qiang, et al. A review of distinct element method researching progress and application[J]. **Rock and Soil Mechanics**, 2007, 28(Suppl. 1): 408-416.
- [4] 徐泳, 孙其诚, 张凌, 等. 颗粒离散元法研究进展[J]. 力学进展, 2003, (2): 251-260.
XU Yong, SUN Qi-cheng, ZHANG Ling, et al. A research progress of particle discrete element method[J]. **Advances in Mechanics**, 2003, (2): 251-260.
- [5] MOLLON G, ZHAO J. 3d generation of realistic granular samples based on random fields theory and Fourier shape descriptors[J]. **Computer Methods in Applied Mechanics & Engineering**, 2014, 279(sep.1): 46-65.
- [6] PODLOZHNYUK A, PIRKER S, KLOSS C. Efficient implementation of superquadric particles in discrete element method within an open-source framework[J]. **Computational Particle Mechanics**, 2017, 4(1): 101-118.
- [7] KRUGGEL-EMDEN H, RICKELT S, WIRTZ S, et al. A study on the validity of the multi-sphere discrete element method[J]. **Powder Technology**, 2008, 188(2): 153-165.
- [8] LU G, THIRD J, MÜLLER C. Discrete element models for non-spherical particle systems: from theoretical developments to applications[J]. **Chemical Engineering Science**, 2015, 127: 425-465.
- [9] 严颖, 季顺迎. 颗粒形态对离散介质剪切强度的影响[J]. 岩土力学, 2009, 30(增刊 1): 225-230, 249.
YAN Ying, JI Shun-ying. A review of distinct element method researching progress and application[J]. **Rock and Soil Mechanics**, 2009, 30(Suppl. 1): 225-230, 249.
- [10] BAO H, ZHAO Z. The vertex-to-vertex contact analysis in the two-dimensional discontinuous deformation analysis[J]. **Advances in Engineering Software**, 2012, 45(1): 1-10.
- [11] 王建全. 三维块体系统接触检索算法与非连续变形分析[D]. 大连: 大连理工大学, 2006.
WANG Jian-quan. A contact detection method for the three-dimensional blocky system and discontinuous deformation analysis (DDA) [D]. Dalian: Dalian University of Technology, 2006.
- [12] MUNJIZA O A, BICANIC D. A combined finite - discrete element method in transient dynamics of fracturing solids[J]. **Engineering Computations**, 2013.
- [13] 刘勋楠, 赵兰浩, 毛佳, 等. 距离势离散单元法[J]. 岩石力学与工程学报, 2017, 36(6): 1353-1362.
LIU Xun-nan, ZHAO Lan-hao, MAO Jia, et al. Discrete element method based on distance potential[J]. **Chinese Journal of Rock Mechanics and Engineering**, 2017, 36(6): 1353-1362.
- [14] ALONSO-MARROQUIN F, WANG Y. An efficient algorithm for granular dynamics simulation with complex-shaped objects[J]. **Granular Matter**, 2009, 11(5): 317-329.
- [15] POURNIN L, LIEBLING T M, GARCÍA-ROJO R, et al. A generalization of distinct element method to tridimensional particles with complex shapes[J]. **General Information**, 2005.
- [16] POURNIN L, WEBER M, TSUKAHARA M, et al. Three-dimensional distinct element simulation of spherocylinder crystallization[J]. **Granular Matter**, 2005, 7(2): 119-126.
- [17] POURNIN L. On the behavior of spherical and non-spherical grain assemblies, its modeling and numerical simulation[J]. **Thesis École Polytechnique Fédérale De Lausanne**, 2005.
- [18] 刘璐. 扩展多面体离散元方法及其在海洋结构冰载荷分析中的应用[D]. 大连: 大连理工大学, 2019.
LIU Lu. Extended polyhedral discrete element method and its application in ice load analysis of marine structures[D]. Dalian: Dalian University of Technology, 2019.